Sesión preparatoria Olimpiada Local 2016-17

(Grupo 1)

Sevilla, 4 de noviembre de 2016

1.- Probar que para todo entero positivo *n*,

$$\frac{1}{1·2}+ \frac{1}{2·3}+\frac{1}{3·4}+ ··· + \frac{1}{n·(n+1)}= \frac{n}{n+1}$$

2.- Probar que $1^{2}+ 2^{2 }+ 3^{2 }+ ··· +n^{2} = \frac{n\left(n+1\right)(2n+1)}{6}$

3.- Probar que si n es impar, entonces 7n + 1 es divisible por 8

4.- Todo número natural *n>1* es primo o se expresa como un producto de números primos.

5.- Sea {*ak*} una sucesión de números enteros tales que *a1=1***;** *am+n***=** *am + an + m·n*para cualesquiera enteros positivos *m*, *n.* Probar que la sucesión está bien definida, es decir, que *ak* toma siempre el mismo valor, independientemente de los *m, n* tales *m+n =* *k*.

6.- Sean $a\_{1}, a\_{2}, ···, a\_{n }\in \left(-1, 0\right].$ Probar que para todo *n*,

$$(1+a\_{1})·(1+a\_{2})· ···, ·(1+a\_{n }) \geq 1+ a\_{1}+ a\_{2}, +··· + a\_{n }$$

7.- Determinar para qué valores de *n*∈*N* es verdadera la desigualdad *2n > n2 + 4n + 5*

8.- En un torneo cada jugador juega con cada uno de los otros jugadores exactamente una vez, y en cada juego hay un ganador y un perdedor.

Decimos que los jugadores *p1, p2 . . . , pm* forman un ciclo de longitud *m* si *p1* le gana a *p2*, *p2* le gana a *p3, . . ., pm−1*le gana a *pm*, y *pm* le gana a *p1*.

Demostrar que si hay un ciclo *p1, p2, . . . , pm* (*m ≥ 3*), entonces hay un ciclo de longitud 3.

9.- Encontrar, si existen, todas las cuaternas de números enteros positivos *(x, y, z, t),* que verifiquen *x2 + y2 = 7(z2 + t2)*.

Nota: Los ejercicios con 7 y 8 quedaron pendientes para hacer en casa.